

École Doctorale d'Astronomie et Astrophysique d'Ile-de-France

MODÉLISATION NUMÉRIQUE

Résolution de l'équation d'onde dans une sphère

Jérôme Novak, Décembre 2005

1 Introduction

L'objet de ce projet est de résoudre numériquement, à l'aide de méthodes relativement précises et peu coûteuses en ressources informatiques l'équation d'onde :

$$\square\phi(t, r) = \sigma(t, r) \quad (1)$$

où $\phi(t, r)$ est un champ scalaire (par exemple une densité) et $\sigma(t, r)$ la source. On ne considérera que le problème à symétrie sphérique, c'est pour cela que les quantités ne dépendent que des variables t et r ; l'équation aux dérivées partielles (1) s'écrit donc :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \sigma. \quad (2)$$

1.1 Problèmes physiques

Comme son nom l'indique, l'équation d'onde apparaît dans de nombreux problèmes physiques où il y a *propagation* d'une information. La grandeur notée c dans (2) correspond alors à la vitesse de cette propagation. On peut penser notamment aux ondes acoustiques dans un fluide, aux ondes électromagnétiques dans le vide, *etc...* En fait, l'opérateur \square (appelé *dalembertien*) est un des opérateurs les plus fréquents (avec le laplacien Δ) dans la modélisation de systèmes physiques par des équations aux dérivées partielles (EDP). L'équation d'onde est la principale représentante de la famille d'EDP hyperboliques (Cf. [4]).

Notre équipe à l'Observatoire de Meudon s'occupe quant à elle de la simulation numérique des sources d'ondes gravitationnelles (étoiles à neutrons, trous noirs) afin de déterminer la forme des ondes émises lors d'événements astrophysiques. Ces formes et amplitudes seront ensuite utilisées par les détecteurs d'ondes gravitationnelles qui commencent à acquérir des données (par exemple VIRGO , le projet franco-italien à Pise). Les équations décrivant la propagation de ces ondes gravitationnelles se ramènent (évidemment !) à plusieurs équations d'onde de type (1).

Le problème de résolution de (1) est ainsi très général d'un point de vue numérique, mais peut s'appliquer à de très nombreux cas physiques et astrophysiques.

1.2 Méthodes spectrales

La méthode la plus simple pour représenter une fonction $f(x)$ dans un programme informatique est de considérer l'ensemble de ses valeurs $\{f^i\}_{i=1\dots N}$ en un nombre fini de points $\{x_i\}_{i=1, N}$ (la grille numérique). La dérivée de f en un point x_j est alors estimée par un schéma *aux différences finies* :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_j} \simeq \frac{f^j - f^{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \quad (3)$$

(schéma d'ordre 1).

Une autre solution (plus précise dans certains cas, voir ci-dessous) consiste à représenter f dans une base finie de *fonctions* aux propriétés bien connues. Cela permet, en connaissant les coefficients de f dans cette base, de calculer simplement les coefficients de sa dérivée. L'exemple le plus connu est l'utilisation de séries (tronquées) de Fourier pour représenter des fonctions périodiques. Dans notre cas, la solution de notre équation (1) n'est *a priori* ni périodique en r , ni en t . Néanmoins, pour la partie spatiale (liée à la coordonnée r), on peut

décomposer f sur une base de polynômes orthogonaux (Legendre, Laguerre, Tchebychev, ...).

Notre groupe à l'Observatoire de Meudon utilise la famille des polynômes de Tchebychev pour représenter les fonctions dans la direction radiale. Leurs propriétés sont présentées dans la section 3.1, les autres familles de polynômes possèdent souvent le même genre de propriétés, mais les polynômes de Tchebychev présentent le grand intérêt de ramener le calcul des coefficients d'une fonction à celui de sa transformée de Fourier, pour laquelle il existe des algorithmes très rapides (FFT ou Fast Fourier Transform).

En général, la représentation d'une fonction par des méthodes spectrales est beaucoup plus précise que celle avec des différences finies. Pour des fonctions ayant les bonnes propriétés (voir les limitations ci-dessous), les coefficients de la décomposition décroissent de manière exponentielle en fonction du nombre de polynômes utilisés dans la base. Il en va de même avec l'erreur sur l'estimation de la dérivée (Cf. [1]). Cette propriété de décroissance de l'erreur est appelée *erreur évanescence*. Elle permet de travailler avec une trentaine de points (coefficients de Tchebychev, voir la section 3.2) et d'atteindre la "double" précision des réels de l'ordinateur. La limitation des méthodes spectrales vient du fait que, pour avoir une erreur évanescence, il faut que la fonction que l'on étudie ait les mêmes propriétés que les fonctions de la base de décomposition. En particulier, pour décomposer sur une base périodique, il faut une fonction périodique ; mais surtout, toutes les fonctions des bases existantes étant continues (même C^∞ !), si l'on cherche à représenter une fonction discontinue, on sera face à de sérieux problèmes (phénomène de Gibbs). Il n'est en général pas recommandé d'utiliser les méthodes spectrales si l'on s'attend à ce qu'il apparaisse des chocs (par exemple en hydrodynamique) lors de l'évolution du système.

1.3 Évaluation des dérivées temporelles

La décomposition spectrale est très efficace pour la partie spatiale des fonctions (pour la variable r pour ce projet). Malheureusement, pour ce qui est de la partie temporelle, mis à part les fonctions périodiques en temps, les tentatives actuelles d'utiliser les méthodes spectrales ont été infructueuses. C'est pourquoi les dérivées temporelles sont estimées par des méthodes aux différences finies. Cette utilisation combinée de méthodes spectrales pour les dérivées spatiales et aux différences finies pour les dérivées temporelles est un compromis au niveau de l'erreur résultante (voir la section 5), qui est bien plus faible qu'avec seulement des schémas aux différences finies, même si elle est plus importante que sur la résolution de l'équation de Poisson ($\Delta\phi = \sigma$, Cf. [2]).

2 Étude analytique

Les méthodes numériques ayant été définies, il reste à mettre l'équation (2) sous une forme approchée qui pourra ensuite être implémentée dans un programme de résolution.

2.1 Écriture de la dérivée temporelle par des méthodes aux différences finies à l'ordre 2

Il est assez facile de voir que, pour pouvoir évaluer la dérivée *seconde* qui apparaît dans (2), il faut utiliser des développements de Taylor au moins d'ordre 2. On note les différents points en temps $\{t^0, t^1, \dots, t^J \dots\}$ et les valeurs du champ $\phi(t^J, r) = \phi^J(r)$. Enfin, $dt = t^{J+1} -$

$t^J = t^1 - t^0$ est le pas de temps (supposé constant). Si l'on écrit donc deux développements de Taylor pour $\phi(t, r)$:

$$\begin{aligned}\phi^{J+1} &= \phi^J + dt \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=t^J} + \frac{dt^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{t=t^J} + o(dt^2), \quad \text{et} \\ \phi^{J-1} &= \phi^J - dt \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=t^J} + \frac{dt^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{t=t^J} + o(dt^2);\end{aligned}$$

on peut alors faire l'approximation :

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{t=t^J} = \frac{\phi^{J+1} - 2\phi^J + \phi^{J-1}}{dt^2} + o(1). \quad (4)$$

En fait on remarque que l'erreur $o(1)$ est en réalité $O(dt^2)$, si l'on pousse le développement ci-dessus un peu plus loin. Cette erreur proportionnelle au pas de temps au carré est le signe d'un schéma d'ordre deux pour l'évaluation de la dérivée seconde. Il faudra donc retrouver cette proportionnalité lors des tests (voir la section 5.2). On peut se demander si écrire un schéma d'ordre plus élevé n'augmenterait pas la précision. Malheureusement, les schémas d'ordre plus grand que 2 sont souvent instables.

2.2 Schémas implicites/explicites

Sachant que l'on veut utiliser des méthodes spectrales pour évaluer les dérivées spatiales, on peut écrire l'équation d'onde (la dérivée temporelle ayant été remplacée par (4)) :

$$\phi^{J+1}(r) = 2\phi^J(r) - \phi^{J-1}(r) + c^2 dt^2 (\Delta \phi^J(r) + \sigma^J(r)), \quad (5)$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ et $\sigma(t, r)$ a été "discrétisée" en la variable t comme ϕ ci-dessus.

On voit donc que, si l'on connaît les fonctions $\phi^J(r)$ et $\phi^{J-1}(r)$, on peut passer au pas de temps suivant et connaître $\phi^{J+1}(r)$ avec le simple calcul de $\Delta \phi$, par des méthodes spectrales. Ce type d'intégration est appelé *explicite* car on peut avancer d'un pas de temps avec uniquement la connaissance des quantités aux pas de temps précédents.

Les calculs peuvent se faire assez vite, mais il existe une limitation fondamentale : la condition de Courant. Celle-ci contraint, pour les schémas explicites et les EDP hyperboliques, le pas de temps pour que pendant la période dt , l'"information" ne se propage pas sur la grille numérique de plus d'un pas spatial dr (entre deux points de la grille). Par exemple, si c correspond à la vitesse de la lumière, cette condition impose de n'utiliser que des pas de temps très faibles et donc d'avoir besoin de beaucoup de temps pour le calcul. Dans le cas des méthodes spectrales utilisant des polynômes de Tchebychev, la distance minimale entre deux points de grilles varie comme $1/N^2$, où N est le nombre de polynômes utilisés (voir la section 3.2).

Pour pouvoir prendre des pas de temps plus grands, il faut faire une intégration (une avancée dans le temps) qui soit *implicite*, c'est-à-dire où le champ ϕ^{J+1} vérifie une équation impliquant ses dérivées spatiales, qu'il faut alors résoudre. Cette équation est obtenue en réutilisant les développements de Taylor de la section précédente qui donnent :

$$\phi^J(r) = \frac{1}{2} (\phi^{J+1} + \phi^{J-1}) + O(dt^2). \quad (6)$$

On remplace alors $\phi^J(r)$ par ce membre de droite et, ce faisant, l'erreur que l'on commet n'augmente pas, car elle reste en $O(dt^2)$. à l'ordre deux, les deux membres de (6) sont

équivalents. L'inconvénient de cette méthode est la nécessité de résoudre le système (7) pour obtenir ϕ^{J+1} , ce qui augmente le temps de calcul, mais le grand avantage est de pouvoir utiliser des pas de temps presque arbitraires.

2.3 Système d'équations linéaires à résoudre pour l'opérateur implicite

L'équation à résoudre pour une intégration implicite entre les instants $t = t^J$ et $t = t^{J+1} = t^J + dt$ est donc :

$$\left[Id - \frac{c^2 dt^2}{2} \Delta \right] \phi^{J+1}(r) = 2\phi^J(r) - \phi^{J-1}(r) + \frac{c^2 dt^2}{2} \Delta \phi^{J-1}(r) + c^2 dt^2 \sigma^J(r), \quad (7)$$

où Id est l'opérateur identité. L'opérateur

$$\left[Id - \frac{c^2 dt^2}{2} \Delta \right] = \left[Id - \frac{c^2 dt^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \quad (8)$$

ne concerne que la partie spatiale des fonctions.

Avec les méthodes spectrales, celles-ci sont représentées par les vecteurs-colonnes composés de leurs coefficients dans la base choisie (celle des polynômes de Tchebychev dans notre cas). Le résultat étant aussi exprimé dans cette base et l'opérateur (8) étant linéaire, ce dernier revient à une multiplication matricielle. Le programme numérique doit ainsi, pour un nombre de polynômes de la base et un pas de temps donnés, calculer la matrice de l'opérateur (8), l'inverser pour résoudre le système linéaire (7) et enfin imposer les conditions aux contours (voir les détails en section 4.4).

3 Utilisation des polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ sont une des familles de polynômes orthogonaux utilisées pour faire des simulations numériques. Ils sont définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ par :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (9)$$

Cette définition fait qu'il est assez simple de relier la "transformée de Tchebychev" d'une fonction à sa transformée de Fourier, pour laquelle il existe un grand nombre d'algorithmes précis et rapides.

3.1 Propriétés des polynômes de Tchebychev

La définition (9) permet de montrer les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (10)$$

$$\forall n > 1, \quad \frac{dT_{n+1}(x)}{dx} = 2(n+1)T_n(x) + \frac{n+1}{n-1} \frac{dT_{n-1}(x)}{dx}. \quad (11)$$

En pratique, on représente une fonction f par une série tronquée de polynômes :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N c_n T_n(x) + \epsilon(x)$$

où $\epsilon(x)$ est l'erreur (décroissant comme e^{-N} pour $f \in \mathcal{C}_{[-1,1]}^\infty$) commise par cette approximation (erreur de troncature). Les c_n sont appelés *coefficients de Tchebychev de f* . C'est sur le vecteur-colonne (de taille $N+1$) composé des c_n qu'agit l'opérateur (8).

Le problème numérique que l'on considère ici est celui d'un champ scalaire $\phi(r)$ à symétrie sphérique défini à l'intérieur d'une sphère de rayon R . On peut montrer que $\phi(r)$ est alors nécessairement une fonction *paire* de r . Il n'est alors nécessaire de décomposer ϕ que sur une base de polynômes paires et, avec la définition (9), on voit que les T_n ont la parité de n . On se placera sur $x \in [0, 1]$ pour ces raisons de parité et l'on n'utilisera que les $(T_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$, avec $x = r/R$.

3.2 Grille de points/transformée de Tchebychev

La fonction sera néanmoins représentée par ses valeurs prises en un certain nombre de points d'une grille numérique. Ces points sont distribués de manière particulière sur l'intervalle $[0, 1]$ et sont appelés *points de collocation* et sont au nombre de $N + 1$, comme les polynômes de la base. Les valeurs de ϕ en ces points permettent de calculer rapidement ses coefficients de Tchebychev.

Dans notre cas des polynômes de Tchebychev pairs, les abscisses de ces points sont données dans $[0, 1]$ par :

$$x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{N}\right) \quad (0 \leq n \leq N). \quad (12)$$

Afin de pouvoir utiliser les algorithmes de transformée de Fourier rapides, il faut que N soit de la forme 2^p , les nombres couramment utilisés sont 16 et 32.

- La première étape de programmation est la construction d'une telle grille numérique (avec $R \neq 1$), la définition d'une fonction (par exemple on pourra commencer avec un polynôme simple) sur cette grille et le calcul de la transformée de Tchebychev (les coefficients) de cette fonction avec une routine existant déjà.
- L'étape suivante est l'utilisation de la routine de transformée inverse (coefficients \rightarrow valeurs de la fonction aux x_n) et la vérification que tout marche bien. Ces passages relient l'*espace des coefficients* avec l'*espace physique*.

3.3 Opérateurs "différentiels" simples

Grâce aux relations de récurrence (10) et (11), il est assez facile et rapide de calculer les coefficients de Tchebychev de $d\phi/dx$, connaissant ceux de ϕ . Il en va de même pour les opérateurs $f(x) \rightarrow f(x)/x$ et $f(x) \rightarrow xf(x)$. Le résultat de ces opérateurs n'est plus une fonction paire, mais *impaire* de x . Elle est donc représentée dans une base $(T_{2n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Les points de collocation restent les mêmes tant que l'on garde le même nombre $N + 1$ de polynômes de Tchebychev dans la base.

- Utilisez les routines de dérivation et multiplication/division par x et testez-les sur des fonctions simples.

4 Résolution numérique du problème

4.1 Résolution explicite

Il s'agit ici de résoudre l'équation d'onde en utilisant le schéma explicite (5) et la condition au bord homogène $\phi(r = R) = 0$:

- Commencez par définir un profil initial pour $\phi(r)$, le même pour $t = -dt$ et $t = 0$; il faut que ce profil vérifie la condition au bord et la condition de parité.
- Pour simplifier, prenez le terme source $\sigma(t, r) = 0$.
- Construisez une boucle sur la variable temporelle, dans laquelle vous avancez de $(\phi^{J-1}, \phi^J) \rightarrow (\phi^J, \phi^{J+1})$ avec le schéma explicite.
- Pour chaque nouvelle valeur ϕ^{J+1} , imposez la condition en $r = R$ en modifiant la valeur de ϕ au dernier point de la grille. Que se passe-t-il si vous ne le faites pas ?
- Pour commencer, prenez un pas de temps très petit ($\sim 10^{-4}$), puis faites d'autres simulation en essayant des valeurs plus grandes.

La suite de l'étude consiste à implémenter le schéma implicite.

4.2 Construction de la matrice de l'opérateur

- Avec $N(+1)$, R et dt fixés, construisez la matrice de l'opérateur (8).

Si l'on compare cette matrice avec celle de l'opérateur Δ (voir [2]), on remarque que la nôtre est inversible sans plus de manipulations (de plus, elle est triangulaire supérieure). Il reste néanmoins des degrés de liberté pour trouver la solution, ils viennent des solutions homogènes de (7) qui seront utilisées dans la section 4.4 pour imposer les conditions aux contours.

4.3 Inversion

Le problème de résolution d'un système linéaire est quelque chose que l'on rencontre souvent. Il existe donc de très nombreuses méthodes pour résoudre (7), connaissant la matrice de (8). On peut se référer par exemple à [3] pour diverses méthodes d'inversion. La méthode "de base" est celle du *pivot de Gauss*, qui est très facile à mettre en œuvre dans notre cas où la matrice est triangulaire supérieure.

Une autre méthode consiste à mettre la matrice "à bandes" : la matrice est remplie de 0, sauf sur la diagonale et quelques sur- et sous-diagonales. Il a été démontré (voir [5]) que, dans le cas d'opérateurs agissant sur des bases de polynômes orthogonaux, on pouvait mettre la matrice à bandes à l'aide d'opérations simples sur les lignes et les colonnes. Ainsi, si l'on note $(a_{ij})_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N}$ les éléments de la matrice de l'opérateur (8), les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \frac{1}{i+1} (a_{(i+2)j} - (1 + \delta_i^0) a_{ij}) & 0 \leq i \leq N-4, & 0 \leq j \leq N \\ c_{ij} &= b_{(i+1)j} - b_{ij} & 0 \leq i \leq N-4, & 0 \leq j \leq N \end{aligned}$$

donne une matrice c_{ij} avec 3 sur-diagonales. Il s'agit bien sûr de faire les mêmes opérations sur le membre de droite de (7). Il suffit ensuite de faire appel à deux routines de la bibliothèque LAPACK (Linear Algebra PACKage) pour résoudre le système.

- Il faut donc choisir entre ces deux méthodes pour résoudre numériquement le système linéaire (7) et obtenir les coefficients de Tchebychev de $\phi^{J+1}(r)$.
- Il faut bien entendu vérifier que la résolution du système est bien faite (encore une fois avec des fonctions polynômes simples).

4.4 Imposition des conditions aux contours

Comme cela a été vu pour le schéma explicite (section 4.1), les conditions aux contours font partie du problème (1). En effet, si l'on regarde l'évolution d'une onde dans une sphère

fermée (condition de réflexion sur le bord) et dans une sphère “ouverte” (la surface de la sphère est transparente pour l’onde), on aura deux situations complètement différentes. Dans notre schéma d’intégration, cette condition aux bords n’a été spécifiée nulle part. D’un point de vue mathématique, il faut utiliser les solutions homogènes en les combinant à la solution particulière afin que le résultat puisse satisfaire les conditions aux bords. Dans notre cas, le bord en $r = 0$ est un peu particulier dans le sens où il y a là une *condition de régularité*, qui a déjà été prise en compte lors du choix de la base de décomposition de Tchebychev (fonction paire à l’origine).

L’équation différentielle ordinaire en r (7) qui est résolue dans l’espace des coefficients admet *a priori* deux solutions homogènes (solutions de (7) sans le membre de droite). Pour nous, il n’y en aura qu’une qui vérifiera la bonne condition de régularité en $r = 0$. Essayez de calculer toutes ces solutions analytiquement ; peut-on les utiliser numériquement ?

- Pour avoir une solution pseudo-homogène, qui ressemble le plus possible à celles analytiques, on inverse à nouveau le système (7), mais avec un membre de droite qui correspond au polynôme de Tchebychev de plus haut degré de la base.
- Il faut ensuite la combiner à la solution particulière obtenue en section 4.3 pour vérifier une condition en $r = R$.

Deux types de conditions aux bords seront utilisés :

1. La condition homogène déjà vue, appelée condition de réflexion en $r = R$, qui s’écrit simplement $\phi(R) = 0$,
2. La condition d’onde sortante (exacte en symétrie sphérique)

$$\phi(t, r) = \frac{1}{r} f(ct - r)$$

où f est une fonction quelconque d’une seule variable. Cette condition s’écrit encore

$$\left. \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r} \right|_{r=R} = 0 \quad (13)$$

Ces deux conditions aux bords s’écrivent chacune numériquement comme combinaison linéaire des valeurs de $\phi(R)$ et $\phi'(R)$:

$$\lambda \phi(R) + \mu \phi'(R) = \kappa.$$

La condition (13) peut s’écrire de la sorte, si l’on remplace la dérivée temporelle par des différences finies :

$$\frac{\partial \phi^{J+1}}{\partial t} = \frac{3\phi^{J+1} - 4\phi^J + \phi^{J-1}}{2dt} + O(dt^2)$$

et (13) se traduit donc par :

$$\left(\frac{3}{2cdt} + \frac{1}{R} \right) \phi^{J+1}(R) + \left. \frac{\partial \phi^{J+1}}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{4\phi^J(R) - \phi^{J-1}(R)}{2cdt} + O(dt^2). \quad (14)$$

5 Tests/Conclusions

On a maintenant de quoi avancer dans le temps $\phi^J(r) \rightarrow \phi^{J+1}(r)$, avec une des deux conditions aux bords.

- Écrivez un programme qui résout (1), étant donné $\forall r \in [0, R]$ $\phi(t = 0, r)$, $\phi(t = -dt, r)$ et $\forall(t, r)$ $\sigma(t, r)$.

5.1 Estimation de l'erreur

Il est toujours primordial de vérifier un programme numérique. Pour cela, il faut pouvoir juger de sa capacité à résoudre le problème initial. Dans le cadre du problème (1), c'est assez simple, car on peut comparer les résultats numériques à des solutions analytiques.

- Pour estimer l'erreur, il faut d'abord trouver au moins un couple de fonctions analytiques $(\phi_{\text{an}}(t, r), \sigma(t, r))$ qui satisfait (1). Il est très important que ϕ_{an} vérifie les conditions aux bords!
- En mettant $\sigma(t, r)$ comme source de votre intégration numérique, comparez ensuite la différence, dans l'espace physique, entre le résultat numérique ϕ_{num} et le résultat théorique ϕ_{an} .
- Enfin, faites varier N et dt pour voir comment varie l'erreur.

5.2 Vérification de l'ordre du schéma

Le dernier point de la section précédente peut être quantifié, dans le sens où, *a priori* l'erreur dominante vient de l'évaluation des dérivées temporelles. Comme on utilise un schéma d'ordre 2 (voir Sec. 2.1), il faut que l'erreur commise décroisse (à peu près) comme dt^2 .

- Vérifiez cette propriété de décroissance de l'erreur en faisant varier dt dans les limites de convergence et de temps de calcul raisonnable.
- Essayez divers nombres de points en r .

L'erreur sature-t-elle? Résout-on de manière satisfaisante l'équation d'onde?

5.3 Problème tridimensionnel

Le problème traité ici peut sembler un peu "académique". Pourtant le programme que vous avez fait n'est plus très loin de la résolution du problème tridimensionnel. Si vous connaissez un peu des propriétés des harmoniques sphériques $Y_m^l(\theta, \varphi)$, essayez de montrer comment ce programme, légèrement modifié, pourrait résoudre une équation d'onde 3D.

Références

- [1] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon et J.-A. Marck, *Spectral methods in general relativistic astrophysics*, J. Comp. App. Math. vol.**109** (1999), pp.433-473.
- [2] P. Grandclément, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon et J.-A. Marck, *A Multidomain Spectral Method for Scalar and Vectorial Poisson Equation with Noncompact Sources*, J. Comp. Phys. vol.**170** (2001), pp.231-260.
- [3] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et B.P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN*, Cambridge Univ. Press (1992).
- [4] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Acad. Press Pub., New York (1949).
- [5] L.S. Tuckerman, *Transformations of Matrices into Banded Form*, J. Comp. Phys. vol.**84** (1989), pp.360-376.