LUTH, Observatoire de Meudon, 23 Novembre 2007

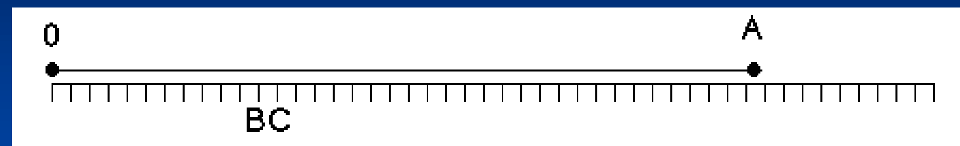
Relativité (d'échelle) de la mesure

Laurent Nottale
LUTH

http://www.luth.obspm.fr/~luthier/nottale/

Mesure de position et de vitesse

1. Origine O ---> OA
2. Règle + unité: BC
3. *Rapport*: x = OA/BC



Cf. Galilée: définition de la vitesse (≈1600)

$$V = \Delta x / \Delta t \ ?$$

→ espace et temps= catégories ≠, dimensionnés

Solution:nombres sans dimension

$x = \Delta x/\lambda$, $t = \Delta t/\tau$, *rapports*, nombres sans dimension -->

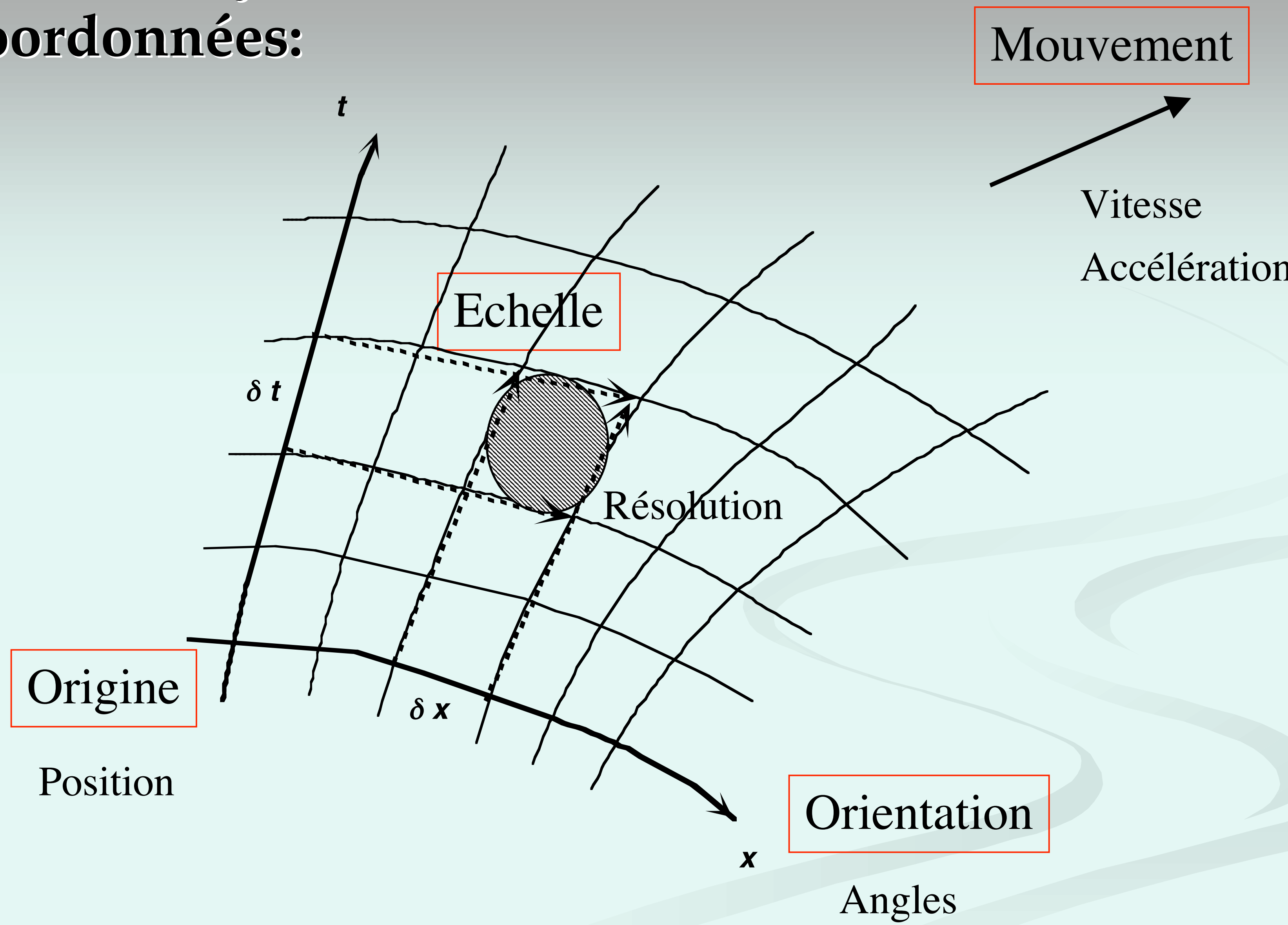
$$v = (\Delta x/\lambda) \,/\, (\Delta t/\tau)$$

Finalement:

$$V = \Delta x/\Delta t = v\,(\lambda/\tau)$$

V dimensionné, v nombre pur, λ/τ = m/s (par ex.)

Etat d'un système de coordonnées:



Les échelles dans la nature

1	10^{-33} cm	Echelle de Planck
	10^{-28} cm	grande unification
10^{10}		
		limite actuelle accélérateurs
	10^{-16} cm	unification électro-faible
10^{20}	$3\ 10^{-13}$ cm	quarks
	$4\ 10^{-11}$ cm	longueur Compton électron
	1 Angstrom	rayon de Bohr atomes
		virus
10^{30}	40 microns	bactéries
	1 m	échelle humaine
10^{40}		
	6000 km	rayon Terre
	700000 km	rayon Soleil
	1 millard km	Système Solaire
10^{50}	1 parsec	distance aux étoiles
	10 kpc	rayon de notre Galaxie
	1 Mpc	amas de galaxies
	100 Mpc	très grandes structures
10^{60}	10^{28} cm	Echelle Cosmologique

RELATIVITÉ D'ÉCHELLE

Continuité

+Abandon de l'hypothèse de différentiabilité de l'espace-temps

Généraliser la relativité du mouvement ?

Transformations de coordonnées non-différentiables

Théorème

Dépendance explicite des coordonnées en fonction des variables d'échelle
+ divergence

$$X \to X(\varepsilon)$$
$$f(X) \to f[X(\varepsilon), \varepsilon]$$

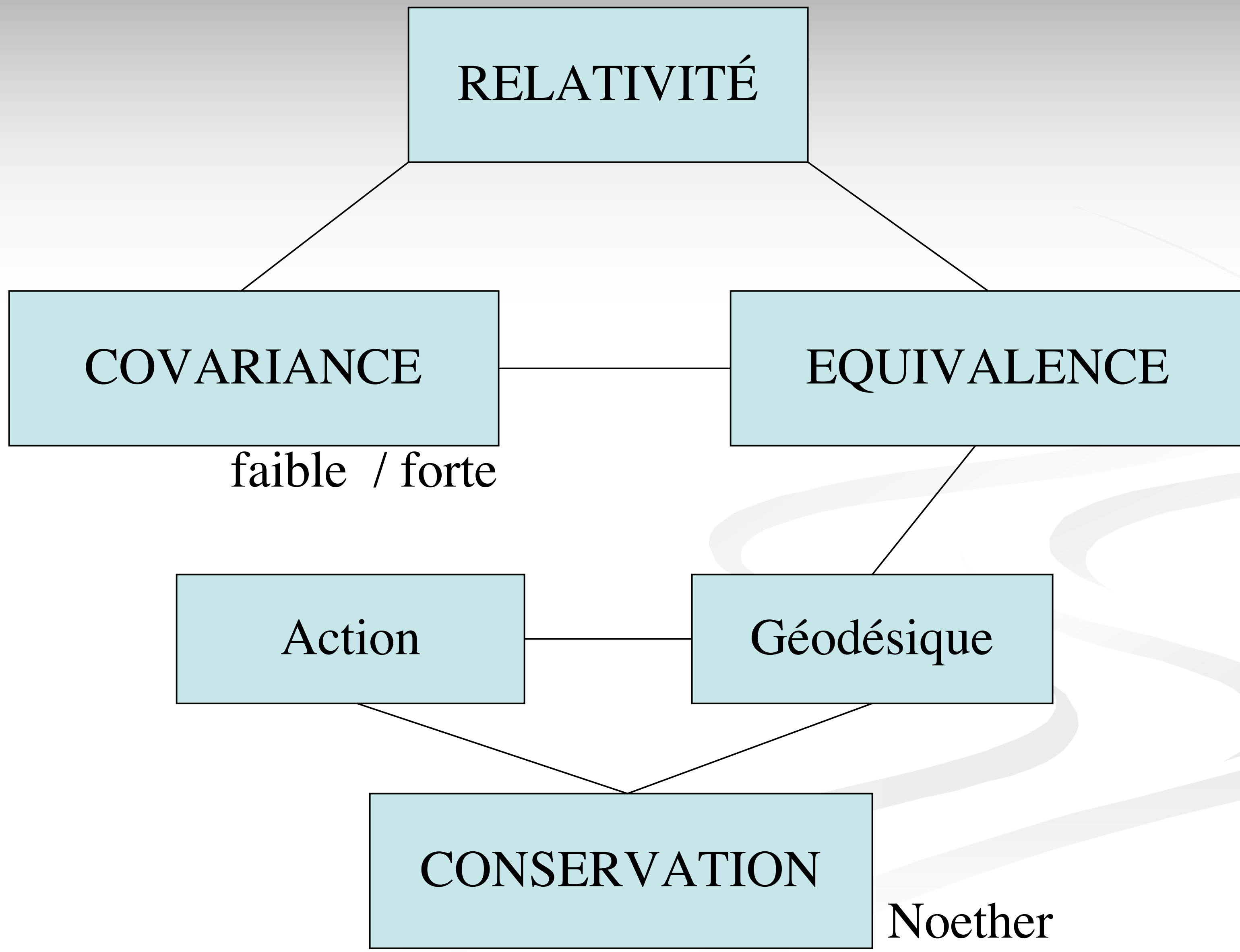
ESPACE-TEMPS FRACTAL

$\partial/\partial X$ $\quad$ $\partial^2/\partial X^2$

$\partial/\partial \ln \varepsilon$ $\quad$ $\partial^2/(\partial \ln \varepsilon)^2$ $\quad$ $\partial^2/\partial X\, \partial \ln \varepsilon$

Compléter les lois de la physique par des lois d'échelle

PRINCIPES PREMIERS



Principe de relativité des échelles

*Redéfinition des intervalles de résolution spatio-temporelle comme caractérisant **l'état d'échelle** du système de coordonnées

*Caractère relatif des résolutions: seuls des rapports d'échelle ont un sens physique, jamais une échelle absolue

***Principe de relativité d'échelle**: « les lois de la nature s'appliquent dans tout système de coordonnée, quel que soit son état d'échelle »

***Principe de covariance d'échelle**: les équations de la physique gardent leur forme (la plus simple possible)* dans les transformations d'échelle du système de coordonnées

*Faible: même forme dans des transformations généralisées
Forte: forme galiléenne (vide, mouvement inertiel)

Conséquences: deux exemples

*Hautes énergies: Echelle de Planck

*Cosmologie: principe de Mach et constante cosmologique

Références et pdf articles: http://www.luth.obspm.fr/~luthier/nottale/frdownlo.htm

Opérateur de dilatation, méthode de Gell-Mann-Levy:

$$\mathcal{L}(\varepsilon') = \mathcal{L}(\varepsilon + \varepsilon\, d\rho) = \mathcal{L}(\varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{L}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\, \varepsilon\, d\rho = (1 + \tilde{D}\; d\rho)\, \mathcal{L}(\varepsilon),$$

$$\tilde{D} = \varepsilon\; \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}$$

Equation différentielle la plus simple possible:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = \beta(\mathcal{L})$$

Développement limité:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,\varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = a + b\mathcal{L}$$

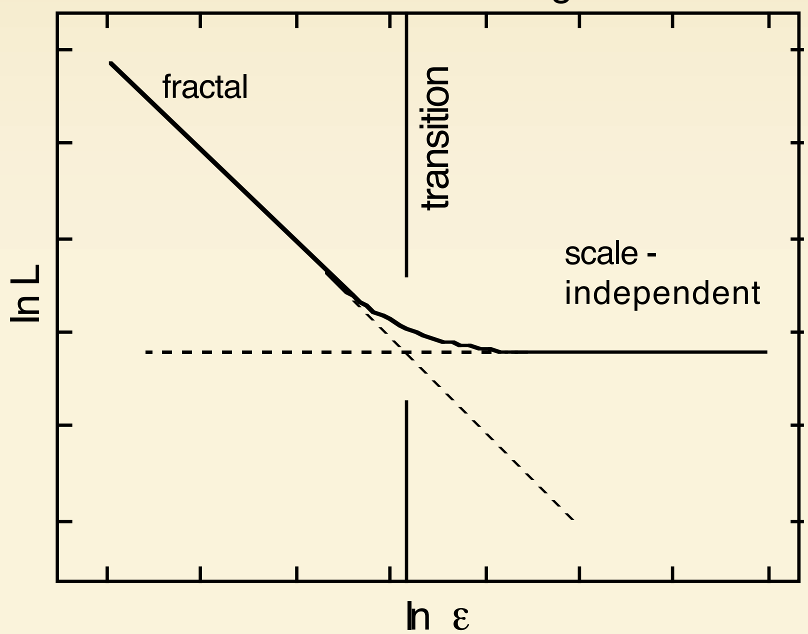
Solution: loi fractale de dimension constante + transition:

$$\mathcal{L}(x,\varepsilon) = \mathcal{L}_0(x)\;\left[1 + \zeta(x)\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{-b}\right]$$

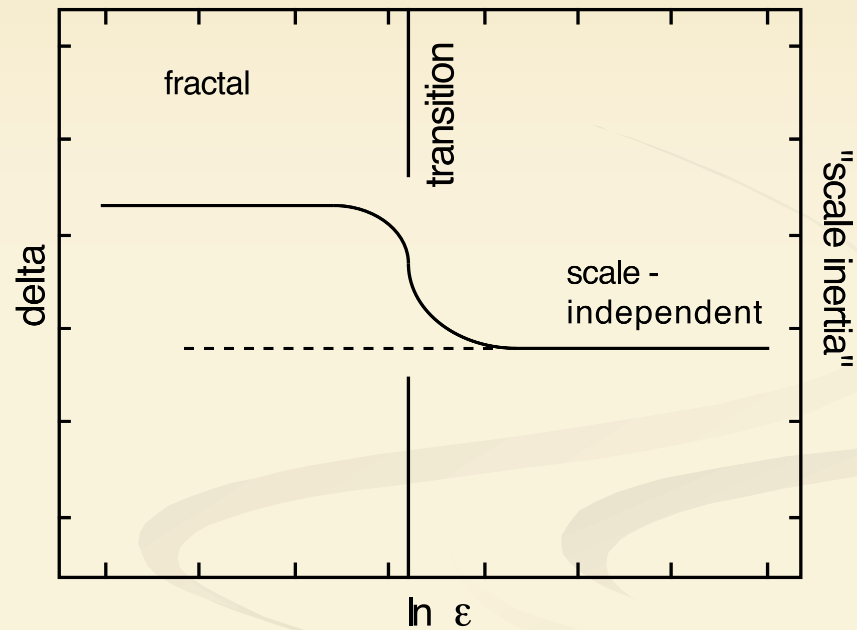
$$\mathcal{L}(x,\varepsilon)=\mathcal{L}_0(x)\left[1+\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}\right]$$

$$\delta_{\mathrm{eff}}=\frac{\delta}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^{\delta}}$$

variation of the length



variation of the scale dimension



Dépendance d’échelle de la longueur et de la dimension d’échelle effective ($\delta = D_F$-1) dans le cas de lois d’ « inertie d’échelle » (solutions d’une équation aux dérivées partielles du premier ordre).

Relativité d'échelle galiléenne

Définition locale de la dimension d'échelle $\delta = D_F - 1$: $\delta = \dfrac{d \ln \mathcal{L}}{d \ln(\lambda/\varepsilon)}$

Comportement asymptotique (partie fractale):

$$\mathcal{L}(x,\varepsilon) = \mathcal{L}_0(x) \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}$$

Transformation d'échelle $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$

$$\ln \frac{\mathcal{L}(\varepsilon')}{\mathcal{L}_0} = \ln \frac{\mathcal{L}(\varepsilon)}{\mathcal{L}_0} + \delta(\varepsilon) \ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) \qquad \delta(\varepsilon') = \delta(\varepsilon)$$

Loi de composition des dilatations:

$$\ln \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\right) = \ln \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) + \ln \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)$$

Même structure mathématique que le groupe de Galilée (mouvement)

$$X' = X - VT, \;\; T' = T, \;\; W = U + V$$

Généralisation: dimensions fractales variables

Analogie avec les lois du mouvement

Aristote: « le temps est la mesure du mouvement » —> variables primaires *x* et *v*, le temps *t* s'en déduit

$$``t = \frac{x}{v}"$$

Galilée: « renversement » des variables + caractère vectoriel de *x* et *v* + petites quantités (anticipant le calcul différentiel)

$$v^k = \frac{dx^k}{dt}$$

Newton: passage à la dynamique, définition de l'accélération comme dérivée seconde

$$a^k = \frac{d^2x^k}{dt^2}$$

Mandelbrot: définition de la dimension d'échelle $\delta = D_F - D_T$: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{D_F - D_T}$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{\ln(\mathcal{M}/\mathcal{M}_0)}{\ln(\lambda/\varepsilon)}$$

Dimension variable: passage à une définition locale

$$\delta = -\frac{d\ln\mathcal{M}}{d\ln\varepsilon}$$

Renversement des variables: projection + résolutions comme « vitesses d'échelle »

$$\ln\frac{\varepsilon^k}{\lambda^k} = \frac{d\ln\mathcal{L}^k}{d\delta}$$

Nouveau concept:« Accélération d'échelle »

$$\Gamma^k = \frac{d^2\ln\mathcal{L}^k}{d\delta^2}$$

Relativité d'échelle restreinte

Loi générale de transformation d'échelle satisfaisant au principe de relativité ?

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon'$$

Trouver les quatre fonctions *a*(*V*), *b*(*V*), *c*(*V*), *d*(*V*) qui satisfont:

$$V = \ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$$

*loi de composition interne

*invariance par réflexion

$$\ln\frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}_0} = a(V)\,\ln\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} + b(V)\,\delta \qquad \delta' = c(V)\,\ln\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} + d(V)\,\delta$$

Solution (LN, 1992, Int.J.Mod.Phys. A7, 4899): transformation log-Lorentz

Nouvelle loi de composition des dilatations

$$\lambda_0 \rightarrow \varepsilon \xrightarrow{\varrho} \varepsilon'$$

$$\boxed{\ln\frac{\varepsilon'}{\lambda_0} = \frac{\ln(\varepsilon/\lambda_0) + \ln\varrho}{1 + \ln\varrho\,\ln(\varepsilon/\lambda_0)/\ln^2(\mathbf{\Lambda}/\lambda_0)}}$$

$\mathbf{\Lambda}$ = échelle de longueur invariante sous les dilatations

Le produit de dilatations standard ('relativité d'échelle Galiléenne') retrouvé à la limite $\mathbf{\Lambda} \rightarrow 0, \quad \mathbf{\Lambda} \rightarrow \infty$

PETITES ECHELLES: identification de l'échelle invariante avec l'échelle de Planck

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_{\mathbb{P}} = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.6160(11) \times 10^{-35}\ m$$

GRANDES ECHELLES: identification de l'échelle invariante avec l'échelle de longueur donnée par la constante cosmologique

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbb{L} = \Lambda_c^{-1/2} = (8.8 \pm 0.8) \times 10^{25}\ \mathrm{m}$$

$L_{\mathrm{pred}} = (2.7761 \pm 0.0004)$ Gpc (LN 93)

RAPPORT des deux:

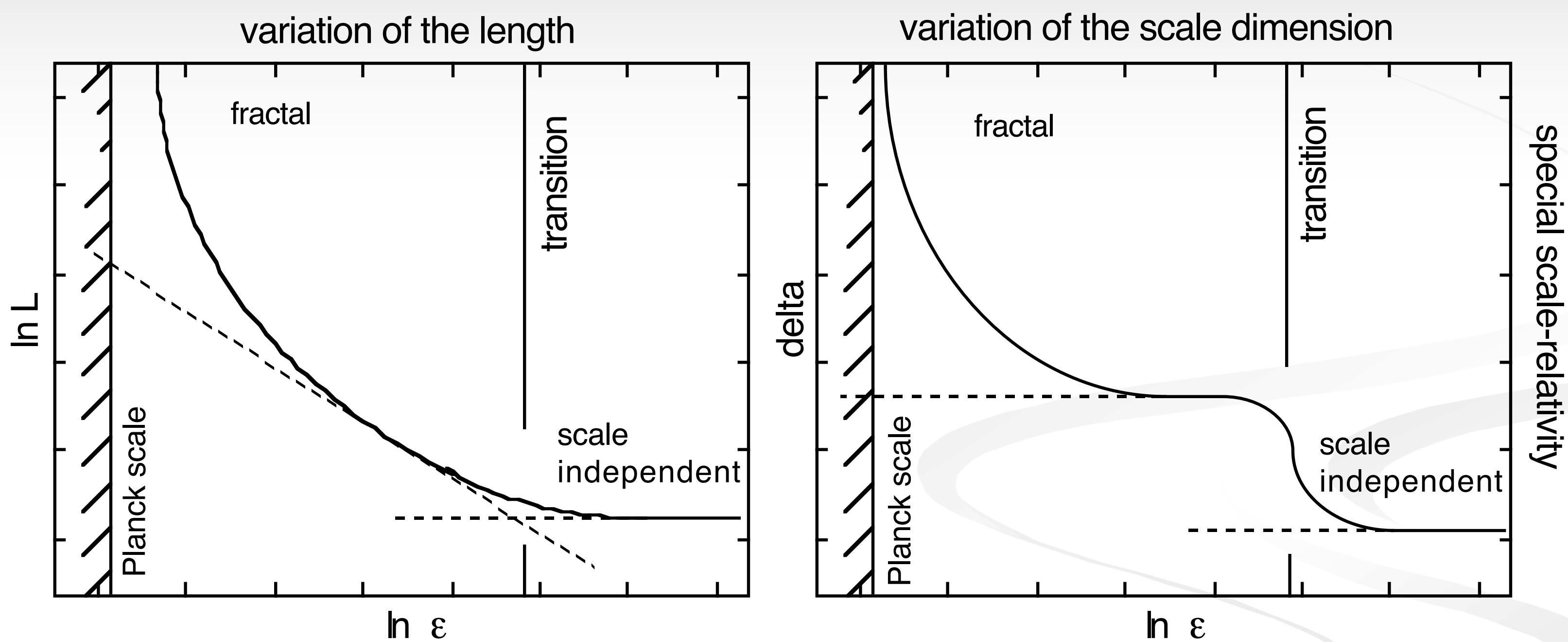
$$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{L}}{\lambda_{\mathbb{P}}} = 5.3 \times 10^{60}$$

$K_{\mathrm{pred}} = (5.3001 \pm 0.0012)\ 10^{60}$

$$\ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) = \frac{\delta_0 \ln(\lambda_0/\varepsilon)}{\sqrt{1 - \ln^2(\lambda_0/\varepsilon)/\ln^2(\lambda_0/\mathbf{\Lambda})}}$$

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\delta_0}{\sqrt{1 - \ln^2(\lambda_0/\varepsilon)/\ln^2(\lambda_0/\mathbf{\Lambda})}}$$

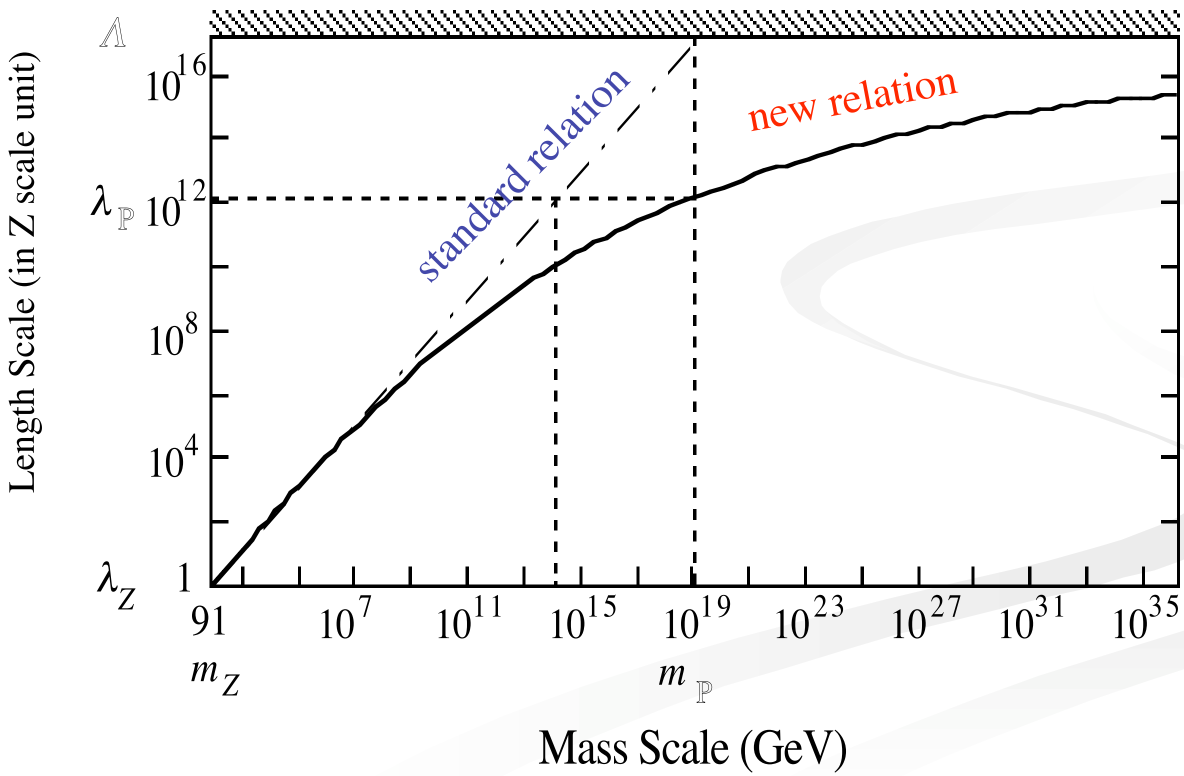
(Cas simplifié : $\mathcal{L}(\lambda_0) = \mathcal{L}_0$)



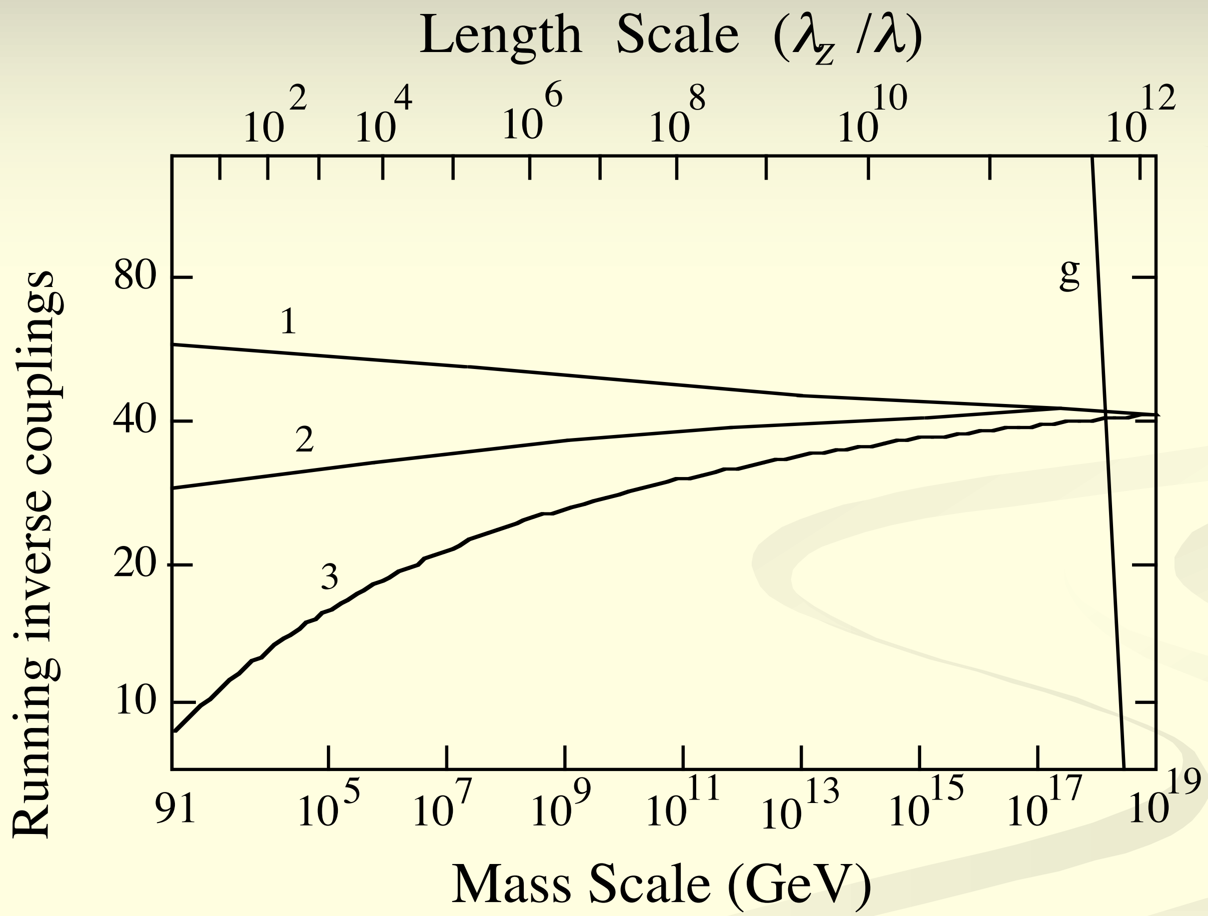
Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective en relativité d'échelle restreinte (lois de dilatation log-lorentziennes)

Conséquence: nouvelle transformation entre échelles de longueur et échelles de masse en relativité d'échelle restreinte

$$\ln\left(\frac{\lambda_Z}{r}\right) = \frac{\ln(m/m_Z)}{\sqrt{1+\ln^2(m/m_Z)/\ln^2(m_{\mathbb{P}}/m_Z)}}$$

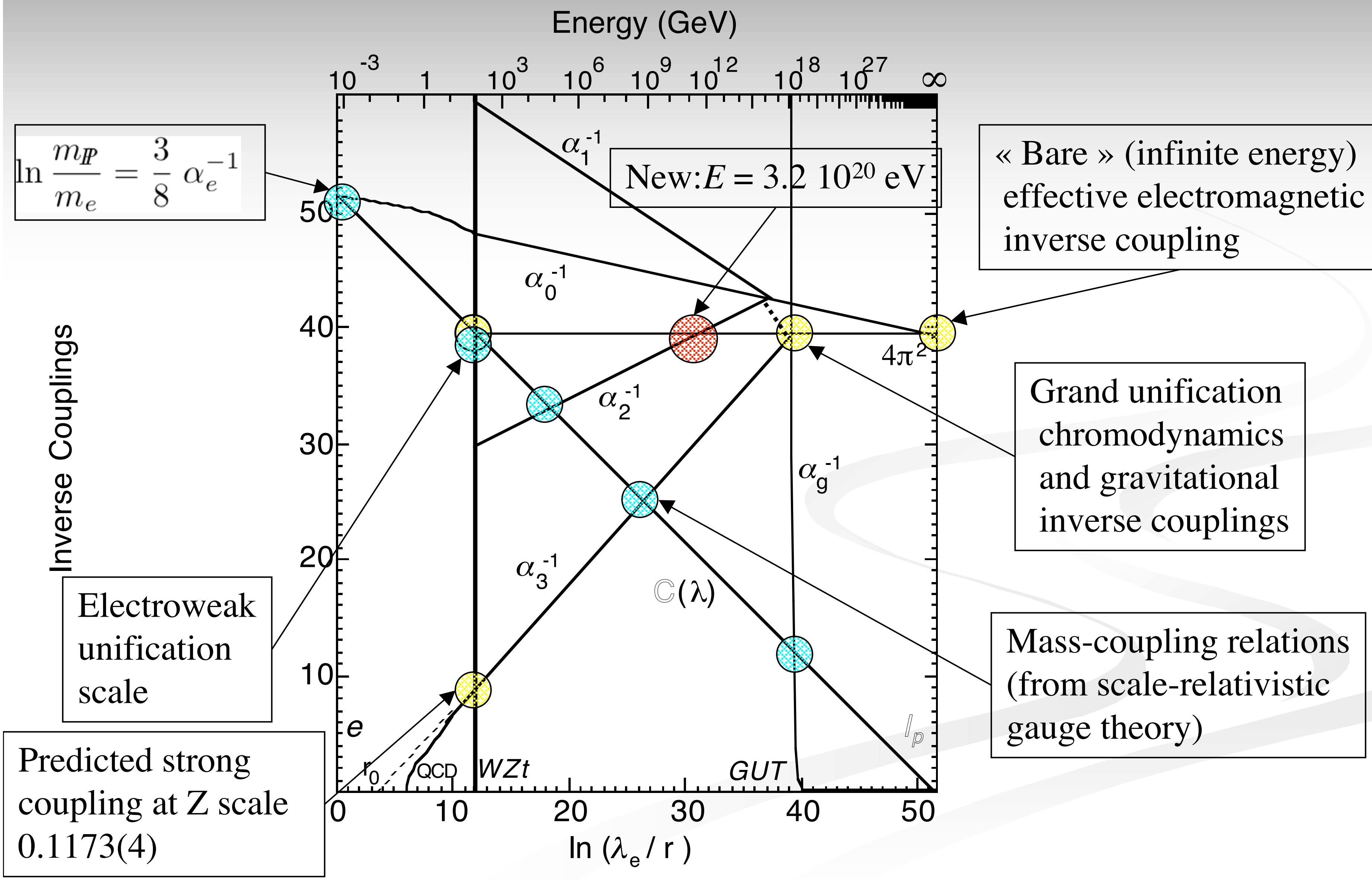


Echelle de Grande Unification = échelle d'énergie de Planck en relativité d'échelle restreinte



Ref: L.N., 1993, Fractal Space-Time and Microphysics, (World Scientific)

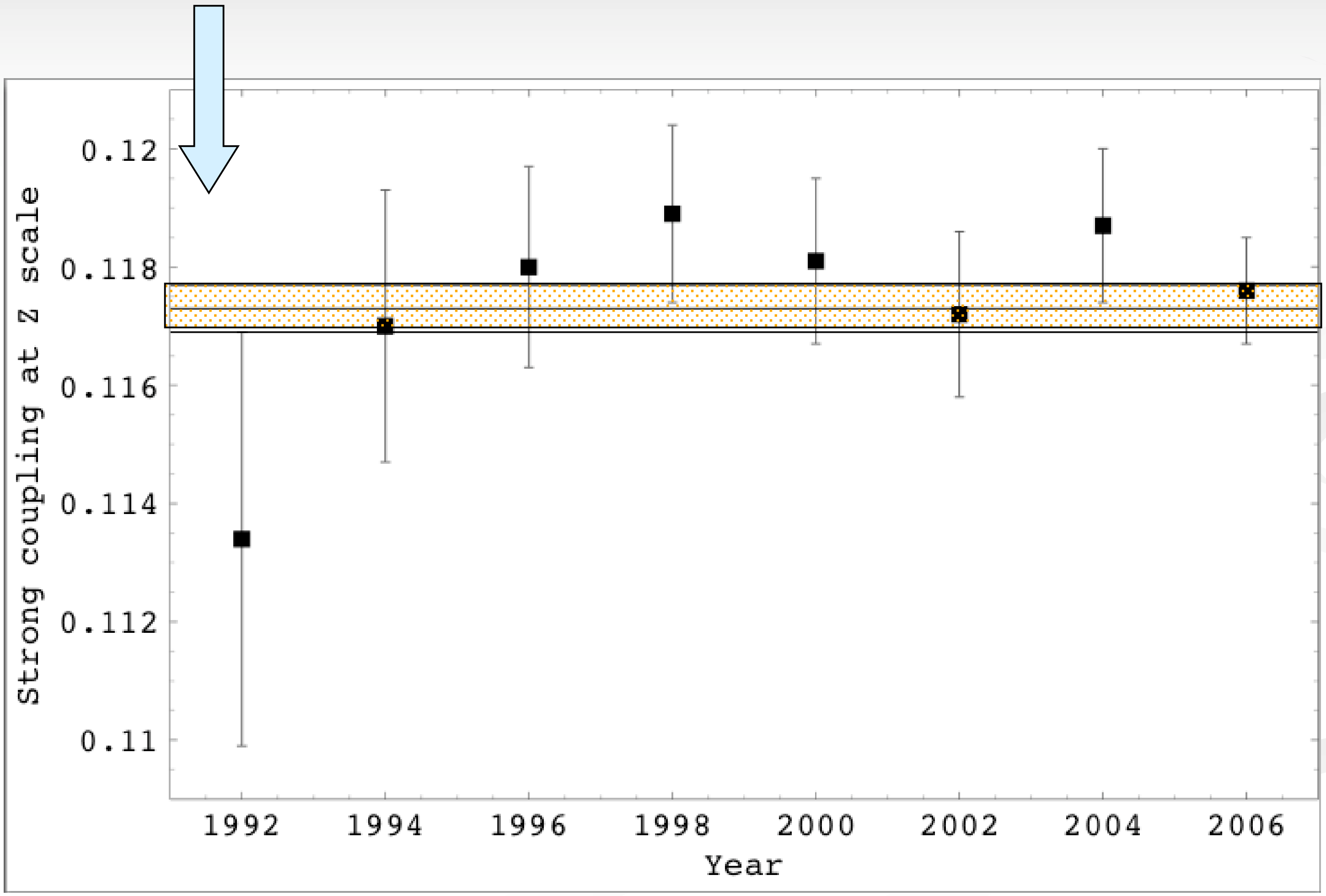
Comparaison aux données expérimentales + extrapolation par groupe de renormalisation



Comparaison entre prédiction et valeur expérimentale de alpha$_s$(m_Z)

Date prédiction

Données: PDG 1992-2006



prédiction

Principe de Mach
et
constante cosmologique

Relativité (d'échelle) des masses

*Einstein--> principe « de Mach »(« Postulate of the relativity of all inertia », Einstein 1917) incorporé dans la construction de la RG

*Mach (≈1880): il n'y a pas de masse, il n'y a que des *rapports* de masse; ces rapports de masse sont des rapports d'accélération (cf Newton):

$$m_1/m_2 = a_2/a_1$$

*Ces rapports se ramènent à des rapports de longueur:
-Masse inerte --> longueur de Compton:

$$m \,/\, m_P = \lambda_P \,/\, \lambda$$

-Masse gravitationnelle active --> longueur de Schwarzschild:

$$m \,/\, m_P = \lambda \,/\, \lambda_P$$

Relations inverses!

La RG avec Λ est machienne. 1

Einstein (1915-1917), Sciama 1952, Wheeler, Barbour, Bertotti, etc…: incorporation du principe de Mach en cosmologie -->

$$m c^2 - \Sigma_i G\, m\, m_i / r_i = m c^2 - G\, M_U\, m / R_U = 0$$

---> $\boxed{G\, M_U / c^2 R_U = 1}$

i.e., relation de Schwarzschild pour l'Univers.

Mais (Einstein 1915)--> toutes les solutions cosmologiques de la RG sont:

-conservatives: M_U = cste

-non-statiques: $R_U = R_U(t)$

Contradiction --> recherche d'une solution statique -->

introduction de Λ (AE1917) --> modèle à R_U = cst

La RG avec Λ est machienne. 2

--> « Solution » insatisfaisante:
-dépendant du modèle
-métastable (Eddington)
-expansion confirmée

*Einstein 1930: solutions sphériques sans Λ ($R_U = R_{max}$). Pas mieux :
-modèle actuel privilégié: hyperbolique
-dépend du modèle

POURTANT L'EXISTENCE MEME DE Λ REGLE LA QUESTION:

Λ = courbure --> $\Lambda = 1/\mathbb{L}^2$

Λ invariant --> $\mathbb{L}$ échelle cosmique invariante -->

$$\boxed{G\, M_U / c^2\, \mathbb{L} = \text{cste}}$$ (LN93)

Cosmological constant and vacuum energy density. 1.

General form of Einstein's field equations (Cartan, 1922):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

i.e., general relativity is a two-constant theory (Λ, G)

Λ = curvature = geometric constant $\qquad \Lambda = \frac{1}{\mathbb{L}^2}$

In pure GR framework, Λ = universal constant, then L = invariant length

Perfect fluid stress-energy tensor with contribution from a Lorentz-invariant vacuum:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2}) u_\mu u_\nu - \frac{p + p_v}{c^2} g_{\mu\nu}$$

since $\rho_v + \frac{p_v}{c^2} = 0$

Cosmological constant and vacuum energy density. 2.

Therefore Einstein's equations read

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} - (\Lambda + \frac{8\pi G}{c^2}\rho_v) g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

Problem: $\rho_v = \sum(\frac{1}{2}\hbar\omega)$ is formally infinite

At Planck scale: $\rho_{I\!P} = \frac{c^5}{8\pi G^2 \hbar} = \frac{c^2}{8\pi G} \times \frac{1}{l_{I\!P}^2}$

While geometric contribution: $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \frac{c^2}{8\pi G} \times \frac{1}{I\!L^2}$

Therefore: $\boxed{\frac{\rho_{I\!P}}{\rho_\Lambda} = \left(\frac{I\!L}{l_{I\!P}}\right)^2} = I\!K^2$ $\sim(10^{60})^2 \sim 10^{120}$

Cosmological constant and vacuum energy density. 3.

Solution: the quantum vacuum energy density is explicitly scale-dependent

$$E_v \propto \frac{1}{r} \Rightarrow \rho_v \propto \frac{1}{r^4}$$

Therefore:

$$\rho_v(\mathbb{L}) = \rho_v(l_{\mathbb{P}}) \times \left(\frac{l_{\mathbb{P}}}{\mathbb{L}}\right)^4 = \rho_\Lambda \times \left(\frac{l_{\mathbb{P}}}{\mathbb{L}}\right)^2 \approx 10^{-120} \times \rho_\Lambda$$

But: always renormalizable ? —> <E> = 0 ?

Other contribution (cf Zeldovich 67):

Gravitational self-energy density of vacuum fluctuations

$$E_g = \frac{G}{c^4}\frac{< E^2 >}{r} \qquad < E^2 >^{1/2} = \frac{\hbar c}{r} \neq 0 \qquad \boxed{\rho_{gv} = \rho_{\mathbb{P}} \left(\frac{l_{\mathbb{P}}}{r}\right)^6}$$

Cosmological constant and vacuum energy density. 4.

Direct approach using scale laws (scale differential equations):

$$\frac{d\rho}{d\ln r} = \Gamma(\rho) = a + b\rho + O(\rho^2)$$

Solution:

$$\rho = \rho_\Lambda \left[1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{-b}\right] \qquad (\rho \to \rho_\Lambda)_{r\to\infty}$$

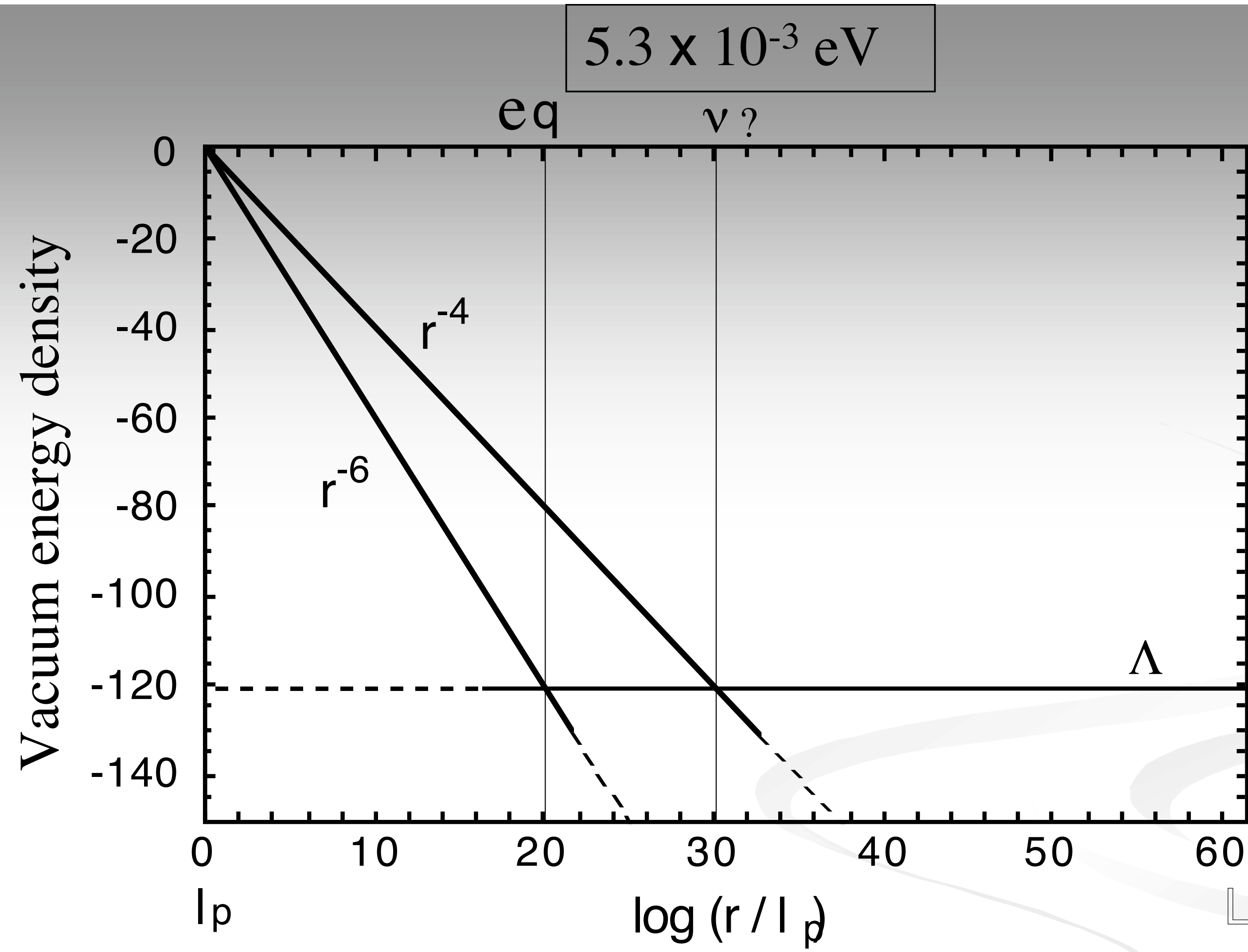
For $b = -6$, one recovers the sum of two terms, geometric + vacuum

Consequence: $\exists$ transition scale r_0 such that

$$\boxed{\mathbb{K} = \frac{\mathbb{L}}{l_{\mathbb{P}}} = \left(\frac{r_0}{l_{\mathbb{P}}}\right)^3 = \left(\frac{m_{\mathbb{P}}}{m_0}\right)^3}$$

i.e., Eddington-Dirac large number relation demonstrated

Nottale93,95,03



Nottale L. 1993, Fractal Space-Time and Microphysics (World Scientific)

Nottale L., 2003, Chaos Solitons and Fractals, 16, 539. "Scale-relativistic cosmology" http://www.luth.obspm.fr/~luthier/nottale/NewCosUniv.pdf

Cosmological constant and vacuum energy density. 5.

Value of r_0 ?

<u>Conjecture</u>: quark-hadron + electron-electron transition during primordial universe

*Largest interquark distance: —> Compton length of effective mass of quarks in pion: $\boxed{m_\pi/2 = 69.78 \text{ MeV}}$

*QCD scale for 6 quarks (extrapolation): $\boxed{\lambda_{\mathrm{QCD}} = 71 \pm 2 \text{ MeV}}$

*Classical radius of the electron $r_e = \alpha \lambda_e = \dfrac{\alpha \hbar}{m_e c}$

——> e-e cross section $\pi\, r_e^{\,2}$

——> $\boxed{E_e = 70.02 \text{ MeV}}$

Result: $\boxed{\mathbb{K} = 5.302 \times 10^{60}}$

Predicted (LN 93):

$\Lambda = 1.362\ 10^{-56}\ \mathrm{cm}^{-2}$

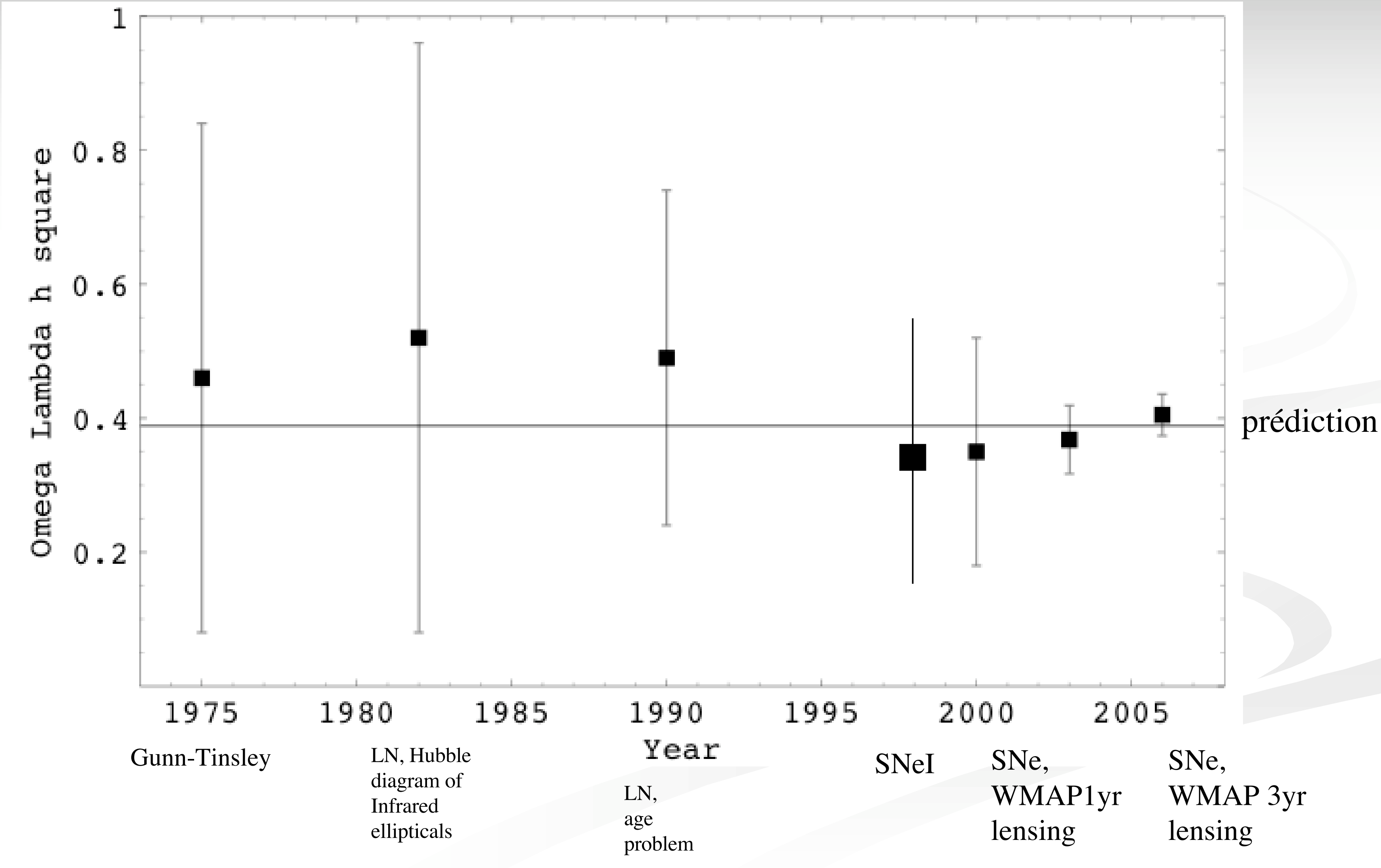
$\boxed{\Omega_\Lambda h^2 = 0.38874(12)}$

Observed:

H_0=71 ± 3 km/s.Mpc, $\Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0.04$ (Wmap…)

$\boxed{\Omega_\Lambda h^2 = 0.40 \pm 0.03}$

Comparaison prédiction observations



Pioneer effect = inertial force

*Spacecraft liberated from solar system
*In free fall : but solar system not inertial
*Inertial frame determined by cosmological metric

--> need an exact solution of Einstein's equations which is valid locally and globally--> cf Eisenstaedt vacuole models

LN03 : inertial system determined with respect to horizon $\mathbb{L}$

Result:

$$a_P = c^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \frac{c^2}{\sqrt{3}\,L_U} = \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 c$$

a_P (pred)= $(6.19 \pm 0.22) \times 10^{-8}$ cm.s^{-2} (from observed value of Λ)

a_P(pred) = $(6.0576 \pm 0.0009) \times 10^{-8}$ cm.s^{-2} (from predicted value of Λ)

a_P (obs) = $(7.8 \pm 1.3) \times 10^{-8}$ cm.s^{-2}

a_P (cor) = $(8.7 \pm 1.3) \times 10^{-8}$ cm.s^{-2}

Le Poncin-Lafitte (priv com): - 10% -->

a_P (obs)=$(7.0 \pm 1.3) \times 10^{-8}$