

INTRODUCTION

Importance de la *mesure* dans la physique du XIX^e.

Mais peu de discussion de la *mesurabilité* des grandeurs physiques.

Exception de Helmholtz 1887 : „Zählen und Messen“.

Helmholtz néglige ici les aspects matériels, institutionnels et sociaux :

Le fait que la connaissance des unités universelles dépende d'une transmission interhumaine ne change rien à l'affaire et au concept de la mesure ; il n'est qu'une circonstance accidentelle.

Contenu, origine, et impact de cette approche ?

ZÄHLEN

Faculté d'ordonner nos impressions dans le temps \rightarrow *Nombres ordinaux*
(et numération)

Si $S(a)$ désigne le successeur du nombre a , l'*addition* de a et b est définie par récurrence, suivant

$$a+1 = S(a) \quad \text{et} \quad a+(b+1) = S(a+b).$$

Cette définition implique l'*associativité* et la *commutativité*, par récurrence.

Comptage d'ensemble d'objets quelconques \rightarrow *Nombre cardinal*

Comptage d'ensemble d'objets semblables \rightarrow *Nombre concret*

UND MESSEN

1) Méthode de comparaison
symétrique et transitive

Grandeur

2) Addition concrète
associative et commutative
+ divisibilité (+ Archimède)

Grandeur mesurable

Mesure : Correspondance entre grandeur mesurable et nombre concret.

Mesure indirecte : par relation avec des grandeurs mesurables.

Nota bene : Seule l'expérience peut dire si l'égalité et l'addition concrètes ont les propriétés attendues des relations arithmétiques correspondantes.

→ Double aspect conventionnel et objectif de la mesure.

SOURCES

1) Fondements des mathématiques

- Hermann et Robert Grassmann (1844, 1871) : *Formalisme*.
- Paul Du Bois-Reymond (1882) : *Empirisme*.

2) Psychologie

- Gustav Fechner (1859) : *Sensations mesurables*.
- Eduard Zeller et Wilhelm Wundt (1881) : *Polémique*.
- Johannes von Kries (1882) et Adolf Elsas (1886) : *Critique kantienne*.

3) Physique

- James Clerk Maxwell (1871) : *Mesurabilité de la température*.
- Ernst Mach (1872) : *Mesurabilité de la masse*.

4) Fondements de la géométrie

- Helmholtz (1868, 1876).

LES FRÈRES GRASSMANN

Conception formelle et générative des mathématiques pures

Formenlehre = théorie de la connexion de quantités qui sont elles-mêmes engendrées par les connexions successives d'éléments générateurs.

Quantité = tout objet univoquement déterminé de la pensée.

Connexion = combinaison donnant un résultat bien défini

Paradigme arithmétique

Nombres : $1+1, (1+1)+1, 1+(1+1), (1+1)+(1+1), 1+((1+1)+1), \dots$

Axiome : $a+(b+1) = (a+b)+1$ permettant d'éliminer les parenthèses et de démontrer l'associativité et la commutativité de l'addition par récurrence.

(approche similaire pour la multiplication)

DU BOIS

Fondement empirique des mathématiques

Données sensibles → représentations → concepts (par abstraction)

Concept = “ce qui émerge quand une ressemblance entre différentes représentations d’un même groupe nous frappe” (Johannes Müller)

Origine empirique des quantités et des nombres

Ensembles discrets → Quantité discrète → Nombres entiers

Longueurs

Grandeurs physiques → Quantité linéaire → Nombres réels

Sensations

Les axiomes de la grandeur linéaire sont déterminés par l’examen de ce qui *varie par degrés* dans notre expérience physique et psychologique.

La pertinence empirique des nombres est inscrite dans leur construction.

PSYCHOLOGIE

Loi de Fechner (1859)

Selon la loi de *Weber*, la différence minimale perceptible δE d'une excitation E est proportionnelle à E .

Par ailleurs, *Fechner* admet que l'incrément $S(E+\delta E)-S(E)$ de la sensation est constant.

Alors, $dS = kdE / E$ et $S = k \ln E$ (loi de Fechner).

Débat entre Zeller et Wundt (1881)

Zeller (1881): Pas d'étalon fixe en psychologie.

Wundt réplique: On peut quand même mesurer les sensations car l'introspection permet d'apprécier $S' = S''$ et $dS' = dS''$.

PSYCHOLOGIE

La critique kantienne de Kries et d'Elsas (1882, 1886)

Ces auteurs admettent la distinction kantienne entre :

- *grandeur extensives* = espace et temps, qui sont additifs et mesurables.
- *grandeurs intensives* = sensations et excitations, indivisibles et non mesurables.

La mesure des grandeurs intensives est nécessairement indirecte et passe par des conventions plus ou moins arbitraires. Pour les sensations, la convention de Fechner est complètement arbitraire et incohérente.

MAXWELL ET MACH

Le concept de *température* est défini par la notion d'équilibre thermique (absence de dilatation ou de contraction des corps mis en contact).

La *transitivité* de cet équilibre n'est pas donnée *a priori*. Elle doit être testée empiriquement.

Les thermomètres à dilatation ne donnent pas une mesure de la température. Ils donnent seulement un *repérage* des états thermiques.

La *mesure* de températures suppose une addition concrète qui n'est donnée que par la voie thermodynamique (cycles de Carnot).

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE

Fait empirique fondamental : Existence de corps rigides librement mobiles (congruence possible).

Si l'espace peut être représenté par une variété différentiable, le *fait* fondamental implique l'existence d'une métrique positive de courbure constante.

(Différentes géométries restent possibles, selon le choix de la courbure.)

Analogie entre arithmétique et géométrie du point de vue Kantien.

Intuition externe (espace) \leftrightarrow axiomes de la géométrie

Intuition interne (temps) \leftrightarrow axiomes de l'arithmétique

Helmholtz veut «empiriciser» l'intuition (*Anschauung* \rightarrow *Thatsache*).

RÉCEPTION

1) *Mathématiciens refondateurs* (ensemblistes, logicistes)

Hostilité de Dedekind, Cantor, Frege et Russell.

2) *Mathématiciens s'intéressant à la physique et à la géométrie*

Admiration de Poincaré et de Hölder

→ théorie mathématique des grandeurs.

3) *Physiciens*

Indifférence générale, sauf les physiciens-philosophes Mach, Duhem et Campbell. Importance du traité de Campbell de 1920.

4) *Philosophes*

« Theory of measurement » de Nagel, Ellis, Suppes et autres.

QUESTION

L'approche de Helmholtz de la mesure est-elle justifiée?

- Légitimité d'une approche *sélective* de la mesure (Michell versus Stevens).
- *Empirisme* excessif des critères de Helmholtz (Heisenberg versus Einstein)
- Réinterprétation des critères de Helmholtz comme une contrainte sur des *modèles* de dispositifs de mesure.